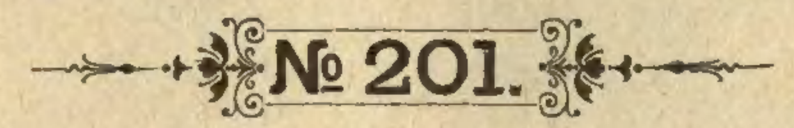
XVII Сем. 10-го ноября 1894 г. № 9.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



ПОСЛѢДѢЙСТВІЕ ВЪ ФИЗИЧЕСКОМЪ МІРѢ.

Слово „послѣдѣйствіе“ есть переводъ нѣмецкаго термина „Nachwirkung“, введеннаго въ науку въ первый разъ *В. Веберомъ* въ 1835 году. Онъ подвергалъ коконовую нить постоянному дѣйствію опредѣленнаго груза и наблюдалъ, что нить каждый день становилась все длиннѣе и длиннѣе, хотя грузъ и оставался постояннымъ. Когда грузъ былъ снятъ, то коконовая нить не сейчасъ приняла свою первоначальную длину, а приближалась къ ней очень медленно. Это то явленіе онъ и назвалъ *послѣдѣйствіемъ*.

Послѣдѣйствіе противорѣчитъ теоріи упругости, такъ какъ въ ней деформація не зависитъ отъ продолжительности дѣйствія внѣшней силы; въ виду этого вопросъ этотъ разрабатывался послѣ многими физиками, изъ которыхъ назову здѣсь *Кольрауша*, *Стрейнца*, *Апртона* и *Перри* и друг., но систематически разобралъ его проф. *Гезехусъ* (1882), взявъ объектами изслѣдованія свинцовую проволоку, каучуковый шнурокъ и палладіевую проволоку, поглотившую водородъ. Кромѣ того его заслуга состояла въ обобщеніи явленій, повидимому очень разнородныхъ, но которыя подчиняются одному и тому же закону послѣдѣйствія.

Цѣль настоящей статьи—познакомить читателя съ мало извѣстнымъ явленіемъ послѣдѣйствія, но въ то же время заслуживающимъ интереса въ виду той обширной роли, какую оно играетъ въ природѣ.

Чтобы дать представленіе объ *упругомъ* послѣдѣйствіи, я приведу здѣсь мои наблюденія надъ кадміевой проволокой 0,944 мм. въ діаметрѣ и 232,20 мм. длиной (т. е. между двумя марками).

Наблюденія дѣлались при помощи катетометра, допускавшаго измѣренія съ точностью до 0,01 мм. Проволока была подвержена растяженію грузомъ въ 907 гр. Въ приведенной таблицѣ въ рубрикѣ „время" числа означаютъ, сколько часовъ прошло отъ начала подвѣшиванія груза, t означаетъ температуру проволоки, а $\triangle l$ увеличеніе длины проволоки въ мм.

время	t	$\triangle l$	время	t	$\triangle l$
$0^h,00'$	10,1°	0,00	$94^h,00'$	13,8	35,70
0.40	10,1	0,40	95.30	15,4	35,20 ?
1.00	10,2	0,96	99.35	16,2	36,68
1.40	10,2	1,28	114.00	12,2	41,12
2.15	10,2	1,40	115.45	13,0	41,60
2.45	10,2	1,72	116.30	13,6	41,74
3.15	10,3	2,28	117.20	14,2	42,48
3.35	10,3	2,32	120.25	16,0	43,60
4.10	10,6	2,52	138.15	13,2	49,40
19.30	9,5	8,78	141.00	15,8	50,14
20.10	10,0	9,04	143.30	16,5	51,44
21.05	10,6	9,06	146.00	16,7	52,22
22.10	11,5	10,10	163.15	15,0	58,54
24.20	12,6	10,36	170.15	15,5	61,08
27.05	14,6	11,94	171.30	15,6	61,10
44.20	10,5	17,80	183.15	14,2	66,56
49.55	15,0	19,84	189.30	14,7	67,36
50.30	15,5	20,42	192.00	15,1	68,44
69.10	12,7	26,36	195.20	14,5	69,98
70.10	13,5	26,90	216.05	12,8	76,54
76.15	—	29,40	218.40	13,0	78,04
91.15	12,2	34,00	219.35	15,0	78,10.
93.00	13,0	34,46			

Эти числа приведены здѣсь въ извлеченіи, такъ какъ наблюденія, которыя я распространилъ на 18 проволокъ изъ различныхъ металловъ, еще не окончены.

Изъ этой табл. видно, что кадміевая проволока удлинялась вслѣдствіе послѣдѣйствія очень сильно, и по прошествіи около 220 часовъ это удлиненіе достигло болѣе 30%.

Если мы представимъ это явленіе графически (ордината $= \triangle l$, абсцисса = время), то замѣтимъ, что вначалѣ послѣдѣйствіе было очень сильно, но затѣмъ стало слабѣть все болѣе и болѣе.

Веберъ даетъ для послѣдѣйствія слѣдующую формулу:

$$x = \frac{b}{(t+c)^p},$$

гдѣ t означаетъ время, а b, c и p константныя, причемъ $p > 1$. Здѣсь нужно замѣтить, что формула эта дѣйствительна только въ извѣстныхъ предѣлахъ.

Послѣдѣйствіемъ обладаютъ не всѣ тѣла въ одинаковой степени, а по обобщенію *Н. Гезехуса* наибольшее упругое послѣдѣйствіе обнаруживается вообще въ тѣлахъ, обладающихъ меньшимъ сцѣпленіемъ и большей подвижностью молекулъ. Этотъ же ученый нашелъ, что послѣдѣйствіе при высокихъ температурахъ слабѣе, чѣмъ при низкихъ (исключеніе представляетъ каучукъ).

Объяснить упругое послѣдѣйствіе подробно мы пока не въ состояніи, хотя нѣкоторые могли бы сказать, что такъ какъ грузъ, подвѣшенный напр. къ проволокѣ, произведетъ въ ней нѣкоторое удлиненіе, то проволока вслѣдствіе этого будетъ имѣть меньшій діаметръ; но извѣстно, что чѣмъ меньшій діаметръ имѣетъ проволока, тѣмъ большее удлиненіе произведетъ данный опредѣленный растягивающій грузъ. Такимъ образомъ нашъ грузъ будетъ дѣйствовать во всякій моментъ времени на проволоку, дѣлающуюся все болѣе и болѣе тонкой, которая вслѣдствіе этого и должна будетъ постоянно удлиняться; т. е. никакого особеннаго такъ называемаго послѣдѣйствія здѣсь и нѣтъ.

Но этому объясненію противорѣчатъ факты. Тогда почему проволока послѣ снятія груза опять укорачивается, причемъ укороченіе это вначалѣ совершается очень быстро, а затѣмъ слабѣе? Это объясненіе никто не будетъ защищать, если захочетъ присутствовать въ пекарнѣ при приготовленіи кренделей. Когда пекарь растянетъ полосу обыкновеннаго тѣста и положитъ ее на столъ, чтобы сдѣлать крендель, полоса тѣста сейчасъ же сильно начинаетъ укорачиваться сама собой.

Вѣроятнѣе всего, что молекулы деформированнаго тѣла приспособляются къ своему новому положенію, но не сразу, а постепенно, слѣдствіемъ чего и является неустойчивое ихъ равновѣсіе.

Н. Гезехусъ думаетъ, что при этомъ играетъ большую роль взаимодѣйствіе внутренняго состоянія тѣлъ съ окружающей средой. Я намѣренъ въ скоромъ времени провѣрить это предположеніе опытнымъ путемъ.

Кромѣ этого такъ называемаго *упругаго* послѣдѣйствія существуетъ еще послѣдѣйствіе и въ другихъ областяхъ физики.

Такъ фосфоресценція представляетъ собою *свѣтовое* послѣдѣйствіе. На основаніи фотометрическихъ измѣреній *Дюфура* выходитъ, что тѣла, обладающія способностью фосфоресцировать, тѣмъ дольше свѣтятся въ темнотѣ, чѣмъ болѣе продолжительное время дѣйствовалъ на нихъ свѣтъ; при этомъ фосфоресценція сначала убываетъ очень быстро, а затѣмъ все медленнѣе и медленнѣе. *Дарвинъ* даетъ для этого явленія формулу, которая совершенно подобна формулѣ *Вебера* для упругаго послѣдѣйствія.

Магнитное послѣдѣйствіе наблюдалось нѣсколько разъ различными изслѣдователями, какъ то *Кольраушемъ*, *Фромме*, *Ауэрбахомъ* и проч.

На основаніи ихъ опытовъ выходитъ, что магнитизмъ тѣла, который получается вслѣдствіе данной намагничивающей силы, соотвѣтствуетъ не только этой послѣдней, но зависитъ и отъ прежде дѣйствовавшихъ силъ.

Примѣромъ *электрическаго* послѣдѣйствія можетъ служить остаточный зарядъ лейденской банки. Замѣчено, что если при помо-

щи разрядника разрядить лейденскую банку, то по прошествіи нѣсколькихъ секундъ при прикосновеніи разрядника она снова даетъ искру, хотя и слабую; по прошествіи еще нѣсколькихъ секундъ разрядникъ покажетъ еще слабѣйшую искру и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что лейденская банка не сразу теряетъ электрическій свой зарядъ (въ упругомъ послѣдѣйствіи проволока не сразу достигаетъ своей первоначальной длины послѣ снятія растягивающаго груза), а только по прошествіи болѣе или менѣе продолжительнаго времени. Кромѣ того опыты *Гопкинсона* показали, что явленіе это зависитъ отъ температуры банки, а *Гордонъ* нашелъ, что механическое сотрясеніе молекулъ стекла ускоряетъ появленіе остаточнаго заряда. Явленія—характерныя и для упругаго послѣдѣйствія.

Можно было бы привести здѣсь еще нѣсколько примѣровъ послѣдѣйствія въ области диффузіи, обезвоживанія кристалловъ (въ эксикаторѣ) и проч., но все это привело бы насъ къ общей формулѣ: *тѣло, подверженное дѣйствію постоянной силы, не приходитъ въ равновѣсіе сразу, а только спустя болѣе или менѣе продолжительное время.*

Отсюда слѣдуетъ, что законъ, упоминаемый въ учебникахъ физики, что дѣйствіе равно противодѣйствію, не можетъ считаться вполнѣ вѣрнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ на столъ гирю напр. въ 10 килогр., то гиря будетъ давить на столъ съ этой силой, а столъ слѣдовательно долженъ бы оказывать противодѣйствіе на гирю съ той же силой и, слѣдовательно, мы имѣли бы полное равновѣсіе. На самомъ же дѣлѣ гиря, какъ показываютъ катетометрическія измѣренія, постепенно входитъ въ доску стола, что показываетъ существованіе упругаго послѣдѣйствія и его иллюстрируетъ.

Послѣдѣйствіемъ объясняются многіе факты, наблюдаемые въ природѣ. Возьмемъ нѣсколько примѣровъ.

Сфинксы—древніе памятники Египта,—какъ извѣстно, едва видны надъ окружающимъ пескомъ; это объясняютъ тѣмъ, что они будто бы имъ занесены. Не отрицая возможности участія наноса песка, мы должны здѣсь въ то же время допустить и участіе послѣдѣйствія, такъ какъ сфинксы стоятъ болѣе 3000 лѣтъ и, слѣдовательно, постепенно *вростали* въ землю, особенно если допустить рыхлость почвы, ибо для такой почвы коэффиціентъ послѣдѣйствія естественно долженъ быть значителенъ.

Въ этомъ обстоятельствѣ нужно искать также и причину того, что древніе города нужно откапывать, какъ напр. въ Греціи. Разумѣется, нельзя отрицать различныхъ наслоеній, происходившихъ въ различныя историческія времена вслѣдствіе разрушенія городовъ и постепенно засыпавшихъ послѣдніе, но нужно допустить при этомъ и способность „врастанія“, какъ частный случай послѣдѣйствія.

Не будетъ фантастично, если мы скажемъ, что современемъ, когда коэффиціентъ послѣдѣйствія различныхъ почвъ будетъ точно извѣстенъ, можно будетъ опредѣлить приблизительно и годъ, въ которомъ было построено данное зданіе; стоитъ только опредѣлить толщину насыпаннаго искусственно въ теченіи столѣтій слоя и глубину, на которую вросло зданіе въ землю.

Извѣстно, что телеграфныя проволоки, протянутыя по столбамъ, современемъ до того ослабляются, что ихъ снова нужно натягивать.

Это явленіе тоже объясняется послѣдѣйствіемъ, а именно постоянную силу здѣсь представляетъ вѣсъ проволоки, который и производитъ постепенное растяженіе проволоки. Къ этому присоединяются еще и толчки, производимые вѣтромъ, которые, какъ сказано было выше, помогаютъ послѣдѣйствію. Къ этой категоріи относятся и висячіе мосты, и цѣпь, служащая для передачи движенія заднему колесу велосипеда, и проч.

А какъ вы думаете, читатель, не „растетъ“ ли монета, только что отчеканенная? Вѣдь серебряная напр. пластинка, на которой прессъ вытиснулъ изображеніе, въ мѣстахъ гладкихъ подвергалась огромному давленію (а въ мѣстахъ рельефныхъ болѣе слабому) и теперь, когда сжимающая сила удалена, эти мѣста должны снова постепенно утолщаться и наконецъ по прошествіи t лѣтъ (см. формулу *Вебера*) изображеніе съ монеты исчезнетъ и она сдѣлается такой же толстой, какъ и до чеканки. Такія же явленія должны происходить и съ пуговицами военныхъ.

Изъ этого примѣра слѣдуетъ, что для сохраненія монетъ для поколѣній, которыя явятся по прошествіи нѣсколькихъ десятковъ тысячелѣтій, нѣкоторые экземпляры нужно не чеканить, но отливать.

Явленіе сложнаго послѣдѣйствія наблюдается между прочимъ у нѣкоторыхъ кристалловъ. Если расплавить напр. натріевую амальгаму въ вертикальной трубкѣ и затѣмъ медленно охладить, то, какъ наблюдалъ *Шуманъ*, она имѣетъ сейчасъ же послѣ затвердѣванія четыре различныхъ слоя, изъ которыхъ одинъ состоитъ изъ длинныхъ толстыхъ призматическихъ иглъ состава Na_2Hg_{10}, а другіе обладаютъ либо зернистымъ сложеніемъ либо состоятъ изъ тонкихъ иглъ. Первый слой постепенно распространяется все болѣе и болѣе и по прошествіи *полугода* вся масса въ трубкѣ превращается въ однообразные кристаллы перваго слоя.

Въ эту категорію входитъ и медленное кристаллизованіе сталактитовъ, какъ о томъ говоритъ проф. *Шведовъ*. Внутреннее строеніе молодыхъ сталактитовъ представляется въ видѣ концентрическихъ слоевъ съ небольшими промежутками между ними; средина сталактита средняго возраста представляетъ стекловидную массу, имѣющую подъ микроскопомъ видъ лучей, идущихъ отъ центра; сталактиты же 2—3 дюймовъ толщиною (возрастъ для которыхъ уже нужно считать многими тысячелѣтіями) имѣютъ сплошную стекловидную массу, которая образовала одинъ кристаллъ—октаэдръ.

Примѣромъ, гдѣ многочисленные толчки помогаютъ послѣдѣйствію, можетъ служить ось желѣзно-дорожнаго вагона. Эта ось сдѣлана изъ кованнаго желѣза и представляетъ такимъ образомъ строеніе волокнистое. По прошествіи нѣсколькихъ лѣтъ ось сама собою ломается и мѣсто излома представляетъ собою поверхность, усѣянную мелкими кристалликами желѣза.

Если мы теперь обратимся къ изготовленію приборовъ и аппаратовъ для точныхъ наблюденій, то увидимъ, что послѣдѣйствіе играетъ здѣсь очень для насъ непріятную роль.

Термометръ, только что приготовленный, не показываетъ точно, такъ какъ его резервуаръ не принялъ еще окончательныхъ размѣровъ, для чего ему надо нѣсколько лѣтъ; да и такой долголѣтній термо-

метръ не будетъ показывать точно, если имъ измѣряются низкія и высокія температуры. Если имъ напр. была измѣрена высокая температура, а затѣмъ сейчасъ же хотимъ измѣрить и низкую температуру, то его шарикъ не можетъ въ силу упругаго послѣдѣйствія принять сразу должный объемъ, а только послѣ болѣе или менѣе продолжительнаго времени. Это время можно однако сократить, если только *выдрессировать* данный термометръ. Дрессировку сдѣлать легко: стоитъ только термометръ нѣсколько сотъ разъ охладить и нагрѣть; тогда въ силу закона, что вторичное, третичное и проч. послѣдѣйствіе совершается все легче и легче, мы заставимъ термометръ принимать объемъ, соотвѣтствующій данной температурѣ, въ очень короткое время.

Сюда относится и причина, почему напр. константныя объемометра *Реньо* современемъ оказываются невѣрными; проволоки, проволоченныя черезъ тонкія отверстія стальной пластинки, спустя нѣсколько времени дѣлаются сами собою толще и такимъ образомъ измѣняютъ свое электрическое сопротивленіе, и т. д.

Изъ этого краткаго очерка читатель видитъ, что явленіе послѣдѣйствія очень распространено въ мірѣ физическомъ и при осторожномъ его примѣненіи къ міру психическому могло бы дать намъ отвѣты на многіе вопросы изъ области психологіи. Такъ память можно было бы объяснить упругимъ послѣдѣйствіемъ (совмѣстно съ приспособленіемъ молекулъ). Подъ эту же рубрику подходитъ и душевное потрясеніе (напр. смерть близкаго человѣка), которое современемъ не только ослабляется, но даже и почти забывается, и проч.

П. Бахметьевъ (Софія).

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

VII. Измѣреніе длины кривыхъ и опредѣленіе площадей.

Методы, съ помощью которыхъ, мы опредѣляемъ въ элементарной геометріи Евклида длину дуги или площадь кривой, цѣликомъ основываются на подобіи фигуръ и на теоріи пропорціональныхъ линій, неразрывно съ ней связанной. Легко убѣдиться, что геометрія Лобачевскаго исключаетъ возможность какого бы то ни было подобія фигуръ въ томъ смыслѣ, въ какомъ этотъ терминъ фигурируетъ въ геометріи Евклида. Въ самомъ дѣлѣ, не трудно видѣть, что въ геометріи Лобачевскаго три угла вполнѣ опредѣляютъ собой треугольникъ**). Пусть въ треугольникахъ ABC и A'B'C' углы соотвѣтственно равны. (См. „Вѣст.“ № 179, фиг. 49). Наложимъ одинъ треугольникъ на другой такимъ образомъ, чтобы вершины B и B' совпали, чтобы прямая B'C' пошла по сторонѣ BC; тогда сторона

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195, 196, 198 и 199.

**) Аналитически это доказывается уравненіемъ XXVI.

B'A' пойдетъ по сторонѣ BA. Далѣе ни одинъ изъ треугольниковъ не можетъ расположиться внутри другого, ибо при такихъ условіяхъ сумма угловъ внутренняго треугольника была бы больше суммы угловъ внѣшняго треугольника (см. „Вѣст.“ № 179 стр. 240). Слѣдовательно, сторона A'C' должна пересѣкать сторону AC въ какой нибудь точкѣ E или совмѣстится съ ней. Въ первомъ случаѣ одинъ изъ угловъ C и C' будетъ внутреннимъ, другой внѣшнимъ угломъ треугольника ECC' и они, слѣдовательно, не могутъ быть равны. Поэтому треугольники совмѣстятся. Итакъ измѣреніе длины кривыхъ линій, площадей прямолинейныхъ фигуръ и объемовъ тѣлъ въ геометріи Лобачевскаго не можетъ опираться на теорію пропорціональности и должно быть основано поэтому на другихъ принципахъ. Общій методъ заключается въ опредѣленіи дифференціала дуги, площади, объема—и въ интегрированіи полученнаго выраженія въ надлежащихъ предѣлахъ.

Мы займемся этими вычисленіямм въ слѣдующихъ главахъ, а здѣсь приведемъ основные элементарные пріемы.

Опредѣленіе длины окружности круга не представляетъ никакихъ затрудненій. Пусть R ея геодезическій радіусъ на орисферѣ. Тогда длина окружности равна $2\pi R$, гдѣ π извѣстное трансендентное число 3,1459*)... Но R, какъ мы видѣли (см. „Вѣст.“ № 199 стр. 153) равно $l \operatorname{cotg} \Pi(\varrho)$, гдѣ ϱ прямолинейный радіусъ окружности, слѣдовательно

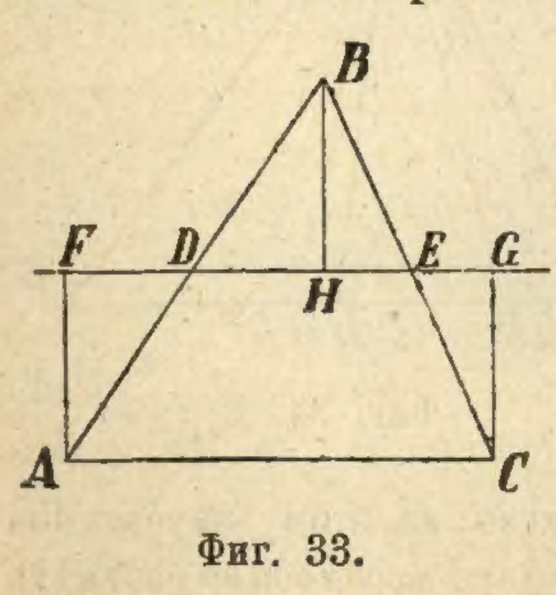
$$C = 2\pi l \operatorname{cotg} \Pi(\varrho) = \pi l \left(e^{\frac{\varrho}{l}} - e^{-\frac{\varrho}{l}} \right). \qquad \text{(XXVIII)}$$

Длину дуги предѣльной кривой въ зависимости отъ ея хорды мы уже опредѣлили въ предыдущей главѣ. А такъ какъ окружность и предѣльная линія представляютъ собой единственныя кривыя, входящія въ элементарную теорію, то ими мы здѣсь и ограничиваемся.

Вопросъ объ измѣреніи площадей мы начнемъ съ опредѣленія площади треугольника. Точкой отправленія у насъ будетъ при этомъ служить слѣдующая основная теорема:

Треугольники, имѣющіе общее основаніе и одинаковую сумму внутреннихъ угловъ, равновелики.

Въ самомъ дѣлѣ, соединимъ середины D и E (фиг. 33) сторонъ AB и BC прямой DE и опустимъ на эту прямую перпендикуляры AF, CG и BH. Изъ равенства треугольника AFD и DBH, съ одной стороны, и треугольниковъ BEH и ECG, съ другой стороны, обнаружится, во первыхъ, что AF = BH = CG и, слѣдовательно, четыреугольникъ AFGC представляетъ собой четыреугольникъ Саккери; во вторыхъ, этотъ четыреугольникъ равновеликъ данному треугольнику; въ третьихъ, сумма угловъ при верхнемъ основаніи FAC и GCA равна суммѣ угловъ треугольника. Но этотъ четыреугольникъ вполнѣ опредѣляется основаніемъ AC треугольника и суммой его угловъ s. Въ самомъ дѣлѣ,



Фиг. 33.

*) Чтобы отличить это π отъ прежняго символа π, который обозначалъ у насъ длину полуокружности или два прямыхъ угла—и не имѣлъ никакого опредѣленнаго чи-

построивъ углы CAF и ACG, равные $\frac{1}{2}s$, мы получимъ двѣ прямыя AF и CG. Эти прямыя неизбѣжно расходящіяся, потому что они представляютъ собой боковыя стороны четыреугольника Саккери, существованіе котораго нами уже доказано. Существуетъ слѣдовательно единственная прямая FG, перпендикулярная къ обѣимъ даннымъ прямымъ, которая и служитъ нижнимъ основаніемъ четыреугольника. Если же основаніе и сумма угловъ треугольника вполнѣ опредѣляютъ собой соотвѣтствующій четыреугольникъ Саккери, то этими элементами опредѣляется также и площадь треугольника*). Положимъ, что въ $\triangle$ ABC сумма угловъ равна s. Разность $\pi - s$ измѣняется отъ треугольника къ треугольнику. Условимся обозначать сумму угловъ треугольника черезъ S(ABC), разность π—S (ABC) черезъ F(ABC), а площадь треугольника черезъ $\triangle$ (ABC).

Въ произвольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 34) проведемъ черезъ вершину сѣкущую BD и докажемъ, что

$$\triangle ABD : \triangle BDC : \triangle ABC = F(ABD) : F(BDC) : F(ABC). \quad (1)$$

Замѣтимъ прежде всего, что

$$S(ABD) + S(BDC) = S(ABC) + \pi$$

или, вычитая обѣ части равенства изъ 2π, найдемъ

$$F(ABD) + F(BDC) = F(ABC). \quad (2)$$

Это соотношеніе будетъ, очевидно, справедливо для всякихъ трехъ треугольниковъ, изъ которыхъ два представляютъ собой части, на которыя дѣлится третій треугольникъ сѣкущей, выходящей изъ вершины.

Допустимъ теперь, что величины F(ABD) и F(BDC) имѣютъ общую мѣру δ, такъ что

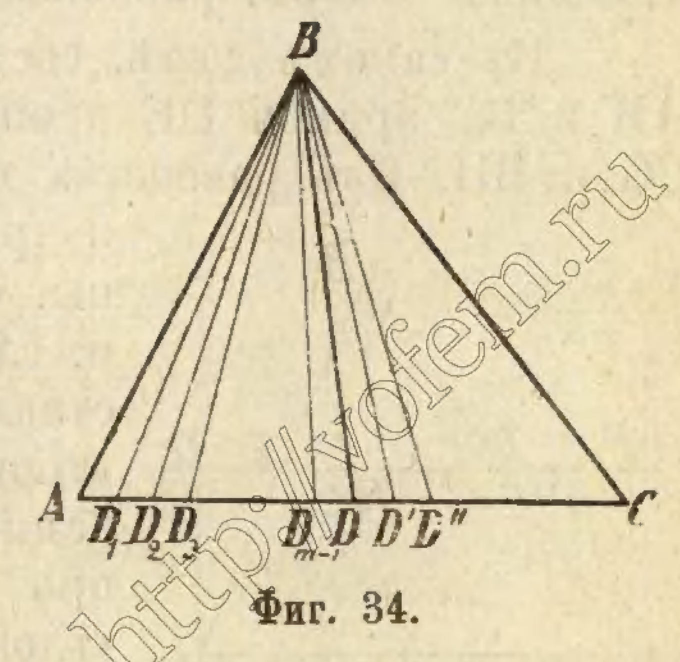
$$F(ABD) = m\delta \text{ и } F(BDC) = n\delta.$$

Положимъ теперь, что точка D перемѣщается и движется отъ A къ C, занимая послѣдовательно положенія $D_1, D_2, D_3, \ldots D, D', D'', \ldots$ Тогда на основаніи соотношенія (2) будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} F(ABD_2) &= F(ABD_1) + F(D_1BD_2) \\ F(ABD_3) &= F(ABD_2) + F(D_2BD_3) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

. . . .

Т. е. при движеніи точки D отъ A къ D значеніе функціи F(ABD) постоянно возрастаетъ. При этомъ оно измѣняется отъ 0 до $m\delta$. Слѣдовательно имѣется m точекъ $D_1, D_2, D_3 \ldots$, въ которыхъ



Фиг. 34.

сленнаго значенія, мы прибѣгаемъ къ другому начертанію буквы; къ этому начертанію мы будемъ прибѣгать только въ томъ случаѣ, если подъ π будетъ *необходимо* разумѣть это трансцендентное число.

*) Это простое и изящное доказательство мы заимствуемъ непосредственно у Лобачевскаго. См. „О началахъ геометріи“ стр. 29.

$$F(ABD_1) = \delta$$
$$F(ABD_2) = 2\delta$$
$$F(ABD_3) = 3\delta$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

и поэтому на основанiи равенства (3)

$$F(ABD_1) = F(D_1BD_2) = F(D_2BD_3) \ldots \qquad = \delta.$$

Итакъ треугольникъ ABD разбивается на m треугольниковъ такимъ образомъ, что каждые два сосѣднихъ треугольника имѣютъ общую сторону и одинаковую сумму угловъ; эти треугольники по основной теоремѣ равновелики. Очевидно треугольникъ BDC такимъ-же образомъ разбивается на n равновеликихъ треугольниковъ BDD', $D'BD''$....

Такъ какъ треугольники $D_{m-1}BD$ и DBD' имѣютъ общую сторону и одинаковую сумму угловъ, то треугольники первой группы равновелики треугольникамъ второй группы и, слѣдовательно,

$$\triangle(ABD) : \triangle(DBC) = F(ABD) : F(DBC);$$

отсюда

$$\triangle(ABD) : \triangle(ABD) + \triangle(DBC) = F(ABD) : F(ABD) + F(DBC).$$

Или, принимая во вниманiе соотношенiе (2),

$$\triangle ABD : \triangle ABC = F(ABD) : F(ABC).$$

Теорема (1), слѣдовательно, доказана. Случай, когда величины $F(ABD)$ и $F(DBC)$ несоизмѣримы приводится къ предыдущему обычнымъ прiемомъ.

Опираясь на это предложенiе, не трудно доказать, что площади двухъ треугольниковъ ABC и $A'B'C'$, имѣющихъ общее основанiе $AB=A'B'$, отнсятся какъ $F(ABC) : F(A'B'C')$. (Фиг. 35).

Если углы A и B равны угламъ A' и B', то треугольники равны и оба отношенiя равны единицѣ. Положимъ, что $\angle A' < \angle A$ и наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на треугольникъ ABC такъ, чтобы основанiя $A'B'$ и AB совпали; тогда точка C' займетъ одно изъ трехъ положенiй D, D', D''.

Во второмъ случаѣ, на основанiи теоремы (1) имѣемъ:

$$\triangle(AD'C) : \triangle(ABC) = F(AD'C) : F(ABC). \qquad (4)$$

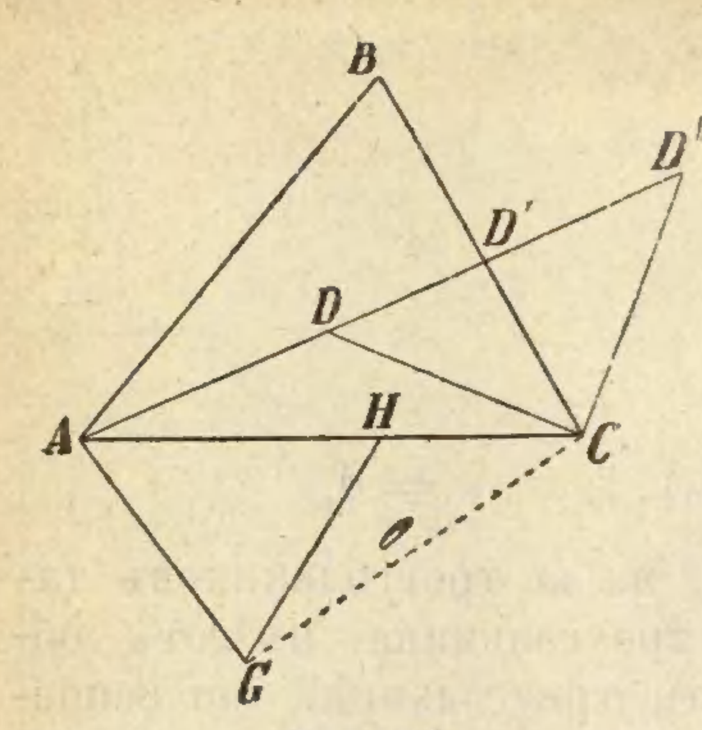
Въ первомъ случаѣ, на основанiи той-же теоремы:

$$\triangle(ADC) : \triangle(AD'C) = F(ADC) : F(AD'C).$$

Перемножая эту пропорцiю съ предыдущей, получаемъ:

$$\triangle(ADC) : \triangle ABC = F(ADC) : F(ABC).$$

Такимъ же образомъ въ третьемъ случаѣ



Фиг. 35.

$$\triangle(AD''C) : \triangle(AD'C) = F(AD''C) : F(AD'C)$$

и перемножая эту пропорцію съ пропорціей (4) имѣемъ:

$$\triangle(AD''C) : \triangle(ABC) = F(AD''C) : (ABC).$$

Теперь уже нетрудно доказать, что площади всякихъ двухъ треугольниковъ ABC и A′B′C′, относятся, какъ функціи F(ABC) и F(A′B′C′).

Въ самомъ дѣлѣ, если три стороны одного треугольника равны тремъ сторонамъ другого, то оба отношенія равны единицѣ. Въ противномъ случаѣ сторону A′C′ можно считать меньше стороны AC и расположить треугольникъ A′B′C′ такимъ образомъ, чтобы онъ занялъ относительно треугольника ABC положеніе AHG (фиг. 35), гдѣ AH представляетъ собой сторону AC′.

Теперь на основаніи предыдущей теоремы имѣемъ:

$$\triangle ABC : \triangle AGC = F(ABC) : F(AGC).$$

А на основаніи теоремы (1) или предыдущей:

$$\triangle(AGC) : \triangle(AHG) = F(AGC) : F(AHG).$$

Перемножая эти двѣ пропорціи, находимъ окончательно:

$$\triangle(ABC) : \triangle(AHG) = F(ABC) : F(AHG).$$

Изложенная теорія обнаруживаетъ, что

$$\triangle(ABC) = \mu F(ABC),$$

гдѣ μ нѣкоторая постоянная величина. Значеніе этой постоянной зависитъ отъ выбора единицы при измѣреніи площадей. Если пріймемъ за единицу площади—площадь такого треугольника, въ которомъ разность между π и суммой угловъ равна угловой единицѣ*), то $\mu = 1$ и

$$\triangle(ABC) = F(ABC) = \pi - S(ABC). \qquad \text{XXIX}$$

Такимъ образомъ выборъ единицы площади ставится въ зависимость отъ выбора угловой единицы. Если измѣрять уголъ, какъ это было указано въ предыдущей главѣ, отношеніемъ дуги къ ея геодезическому радіусу, то эту формулу можно писать такъ:

$$\triangle' ABC = \pi - S(ABC).$$

Переходъ отсюда къ площади многоугольника дѣлается совершенно такимъ-же образомъ, какъ и въ сферической геометріи и мы приходимъ къ выраженію

*) Такое соглашеніе возможно только въ предположеніи, что всегда можно построить треугольникъ, имѣющій данную сумму угловъ, и что за основную единицу принимается величина, не превышающая π. Первое утвержденіе доказано ниже (см. форм. (9) и примѣчаніе къ ней).

$$\text{пл. мног.} = (n-2)\pi - S, \qquad \text{XXX}$$

гдѣ S сумма внутреннихъ угловъ многоугольника. Формула XXIX замѣчательна во многихъ отношеніяхъ.

Прежде всего замѣтимъ, что величина S(ABC) всегда больше нуля, а потому Δ(ABC) не превышаетъ π, т. е. отношеніе площади произвольнаго треугольника, къ площади того треугольника, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ равна угловой единицѣ и площадь котораго принята нами за единицу, не можетъ превышать отношенія двухъ прямыхъ угловъ къ этой угловой единицѣ. Итакъ на плоскости Лобачевскаго площадь треугольника не можетъ превышать извѣстныхъ предѣловъ. Допущеніе, что площадь треугольника можетъ быть сдѣлана сколь угодно большой вполнѣ эквивалентно постулату Эвклида*).

Представимъ себѣ, далѣе, прямоугольный треугольникъ, ACB, въ которомъ катетъ BC неопредѣленно возрастаетъ. Площадь треугольника при этомъ равна

$$\frac{\pi}{2} - A - B.$$

Но съ возрастаніемъ катета BC гипотенуза стремится сдѣлаться параллельной прямой BC; уголъ B стремится поэтому къ O, а уголъ A къ $\Pi(b)$; слѣдовательно, площадь треугольника имѣетъ предѣломъ $\frac{\pi}{2} - \Pi(b)$. Такъ какъ при такихъ условіяхъ треугольникъ приближается къ полосѣ, ограниченной прямой BC, перпендикуляромъ AC и другой прямой, проходящей черезъ вершину A параллельно CB, то говорятъ, что площадь полосы, ограниченной двумя параллелями и перпендикуляромъ b, равна

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \Pi(b) \qquad \text{XXXI}$$

Но нужно, конечно, помнить, что такая формулировка не присваиваетъ предложенію никакого другого содержанія, кромѣ того, которое содержится въ изложенномъ выводѣ.

Однако полученное нами выраженіе можетъ вести къ одному небезъинтересному парадоксу. Если положить въ уравненіи XXXI $\Pi(b)$

---

*) Лобачевскому это обстоятельство, конечно, хорошо извѣстно. Однако, по недосмотру, въ сочиненіи „О Началахъ Геометріи“ имъ допущена слѣдующая погрѣшность: „Итакъ при сравненіи площадей двухъ треугольниковъ“, говоритъ онъ, „всегда можно полагать, что у нихъ по одному боку равному, которой и будемъ называть основаніемъ. *Далѣе каждый изъ сихъ треугольниковъ, оставаясь на томъ же основаніи, можетъ быть превращенъ въ прямоугольной*“. (Стр. 29). Если бы каждый треугольникъ можно было превратить въ прямоугольный, не измѣняя основанія, то площадь всякаго треугольника можно было бы удвоить: въ самомъ дѣлѣ, приложивъ къ полученному прямоугольному треугольнику другой ему тождественный такимъ образомъ, чтобы два равныхъ катета совпали, [redacted] получимъ равнобедренный треугольникъ, площадь котораго въ два раза больше площади даннаго треугольника. Если площадь всякаго треугольника можно удвоить, то площадь треугольника можетъ быть сдѣлана сколь угодно большой. Да и помимо того, очевидно, что въ прямоугольный треугольникъ можетъ быть превращенъ только такой треугольникъ, площадь котораго не превышаетъ $\frac{1}{2}\pi$.

равнымъ $\frac{\pi}{2}$, т. е. перейти къ геометріи Евклида, то получимъ $\sigma = 0$. Между тѣмъ въ геометріи Евклида площадь полосы безконечно велика. Это кажущееся противорѣчіе не трудно объяснить. Выраженіе σ въ уравненіи XXXI даетъ намъ отношеніе площади полосы, разсматриваемой, какъ предѣлъ нѣкотораго треугольника, къ площади другого треугольника, принятаго за единицу. Но за единицу принята площадь треугольника, въ которомъ разность между двумя прямыми и суммой угловъ въ треугольникѣ равна угловой единицѣ. Величина этой единицы зависитъ отъ величины l, характеризующей пространство. Если мы нашли, что

$$\lim \sigma = 0 \qquad (l=\infty)$$

то это значитъ, что отношеніе площади полосы къ площади треугольника, принятаго за единицу, стремится къ нулю, когда пространство по своимъ свойствамъ приближается къ пространству Евклада, когда величина l неопредѣленно возрастаетъ. Когда мы обращаемся къ пространству Евклида, то здѣсь, за отсутствіемъ такого треугольника, принимаютъ за единицу совершенно другую площадь, именно двойную площадь равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны линейной единицѣ. И нѣтъ ничего удивительнаго, ничего противорѣчащаго равенству XXXI въ томъ, что площадь полосы безконечно велика по сравненію съ этой единицей. Изъ этого можно только сдѣлать одинъ выводъ: отношеніе площади треугольника, который былъ принятъ за единицу въ предыдущей теоріи, къ площади равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, катетъ котораго равенъ единицѣ длины, стремится къ безконечности вмѣстѣ съ l.

При этомъ предполагается, что единица длины не зависитъ отъ l. Такой выводъ будетъ совершенно справедливъ и мы это сейчасъ обнаружимъ аналитически. Мы предложимъ для этого формулу, выражающую площадь треугольника въ зависимости отъ трехъ сторонъ и одной изъ высотъ. Эта формула намъ будетъ полезна и въ слѣдующей главѣ.

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Вліяніе намагничиванія на размѣры стержней и колецъ изъ мягкаго желѣза. По этому вопросу сдѣланы недавно весьма интересныя наблюденія Sh. Bidwell'емъ, который давно уже занимается изученіемъ измѣненій размѣровъ стержней изъ мягкаго желѣза подъ вліяніемъ намагничиванія. Еще при прежнихъ своихъ работахъ онъ обнаружилъ, что при достаточномъ увеличеніи напряженія намагничивающей силы желѣзный стержень, который сначала удлиняется, начинаетъ укорачиваться, при напряженіи между 300 и 400 C. G. S. единицами пріобрѣтаетъ

первоначальные свои размѣры, а при дальнѣйшемъ увеличеніи напряженія намагничивающей силы начинаетъ сжиматься. Кромѣ того еще Joule замѣтилъ, что при прочихъ равныхъ условіяхъ удлиненіе стержня тѣмъ больше, чѣмъ мягче желѣзо, т. е. чѣмъ тщательнѣе оно прокалено. — Взявши кусокъ желѣзной проволоки въ 10,6 cm длины и 0,265 cm діаметра, Bidwell нашелъ, что подъ вліяніемъ намагничиванія проволока эта удлиняется на 0,0000045 своей длины, причемъ этотъ maximum удлиненія наступаетъ при 140 C. G. S. единицахъ намагничивающей силы. Когда та же проволока была тщательно прокалена, то maximum ея удлиненія уменьшился до 0,0000008 ея длины при 60 C. G. S. единицахъ намагничивающей силы. Закаливъ ту же проволоку, Bidwell нашелъ maximum ея удлиненія 0,0000025 ея длины при 110 един. намагничивающей силы. Попытки Bidwell'я достичь прокаливаніемъ того, чтобы желѣзный стержень вовсе не удлинялся при намагничиваніи и при слабыхъ намагничивающихъ силахъ началъ бы уже сжиматься, какъ это имѣетъ мѣсто для стержней изъ никеля и кобальта,—попытки эти не увѣнчались успѣхомъ.

Нѣсколько иные результаты дали опыты съ желѣзными кольцами, которыя вообще относятся къ намагничиванію, какъ и стержни, т. е. сперва діаметръ ихъ увеличивается, достигаетъ maximum'а при нѣкоторой величинѣ намагничивающей силы, а затѣмъ начинаетъ уменьшаться. Изъ хорошаго мягкаго желѣза было приготовлено кольцо, очень сильно прокалено и обвито 515 оборотами изолированной проволоки. Уже при самомъ слабомъ токѣ діаметръ кольца сталъ уменьшаться, причемъ до этого не удалось обнаружить никакого увеличенія. Увеличивая силу тока, удалось достичь уменьшенія діаметра на 0,0000075 его длины. Кривая, выражающая зависимость между напряженіемъ намагничивающей силы и укороченіемъ діаметра, оказалась весьма схожей съ подобной же кривой, полученной прежде для кобальтоваго стержня. Судя по ходу этой кривой, можно бы достичь и еще большаго укороченія діаметра кольца, но развиваемая намагничивающимъ токомъ теплота помѣшала продолжать опытъ.

Если закалить такое кольцо, раскаливши его и быстро затѣмъ охладивъ погруженіемъ въ холодную воду, то оно пріобрѣтаетъ первоначальныя свойства, т. е. сперва расширяется, а при дальнѣйшемъ увеличеніи намагничивающей силы начинаетъ сжиматься. (Naturwiss. Rundsch). *В. Г.*

Соотношеніе между молекулярнымъ вѣсомъ твердыхъ тѣлъ и ихъ удѣльнымъ вѣсомъ.—F. Pisani нашелъ для цѣлаго ряда сложныхъ минераловъ слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{M}{2s} = M.\ W, \text{ откуда } W = \frac{1}{2s},$$

гдѣ M есть молекулярный вѣсъ даннаго соединенія, s—его уд. вѣсъ, а W—его теплоемкость; MW есть, слѣдовательно, молекулярная теплоемкость.—Соотношеніе это приблизительно вѣрно только для кислородныхъ безводныхъ солей; для содержащихъ воду кислородныхъ солей $^1/_2 s = {}^3/_4 W$, для большей части окисловъ, сѣрнистыхъ соединеній и

галоидныхъ солей $^1/_2 s = ^2/_3 W$, для большей части металлоидовъ и для нѣкоторыхъ металловъ $^1/_2 s = 3 W$, для группы же платины $^1/_2 s = ^3/_2 W$. (Naturwiss. Rundsch.). *В. Г.*

Нововведеніе въ фотографіи.—Въ послѣднее время нѣкоторые фотографы употребляютъ слѣдующій способъ для полученія на одной и той же пластинкѣ сразу нѣсколькихъ изображеній одного и того-же лица въ различныхъ его положеніяхъ. Снимающійся становится задомъ къ фотографическому аппарату и лицомъ къ углу, образуемому двумя зеркалами. Тогда на чувствительной пластинкѣ получается одновременно отпечатокъ изображенія затылка и спины снимающагося и рядъ изображеній, получающихся отъ зеркалъ; всѣ эти изображенія составляютъ какъ бы кружокъ. Понятно, что съ уменьшеніемъ угла между зеркалами число изображеній увеличивается.

Новое примѣненіе фотографіи.—E. Pringsheim и Gradenwitz удачно примѣнили фотографію для возстановленія стараго текста палимпсестовъ, т. е. такихъ пергаментовъ, на которыхъ кромѣ бросающагося въ глаза текста замѣтны еще слѣды болѣе стараго текста, смытаго впослѣдствіи вторымъ переписчикомъ. Чтобы возстановить этотъ старый текстъ приготовляются два негатива A и B съ одного и того-же мѣста рукописи такъ, чтобы на негативѣ A болѣе старый текстъ отпечатался по возможности слабѣе, а выступилъ бы новый текстъ, на негативѣ же B чтобы старый текстъ отпечатался по возможности съ тою же силой, какъ и новый. Затѣмъ съ негатива B готовится діапозитивъ B′ и накладывается своимъ чувствительнымъ слоемъ на чувствительный слой негатива A, такъ чтобы соотвѣтственныя части изображеній на негативѣ A и на позитивѣ B′ совпали. Если разсматривать такія двѣ наложенныя другъ на друга пластинки въ проходящемъ свѣтѣ, то, если снимки удачно сдѣланы, новый текстъ почти совершенно скрадывается и ясно выступаетъ болѣе старый текстъ. Дѣйствительно:

	фонъ	*старый текстъ*	*новый текстъ*
на негативѣ A	темный	темный	свѣтлый
на позитивѣ B′	свѣтлый	темный	темный.
при наложеніи A на B′ въ проходящемъ свѣтѣ	темный+свѣтлый	темный + темный	свѣтлый+темный.

Очевидно, что для удачи работы надо подобрать пластинки такъ, чтобы темный фонъ негатива A + свѣтлый фонъ позитива B′ давали бы тонъ такой же силы, какой даютъ свѣтлый новый текстъ негатива A + темный новый текстъ позитива B′. Тогда новый текстъ совершенно сливается съ фономъ и съ двухъ наложенныхъ другъ на друга пластинъ A и B′ можно приготовить новый негативъ C, на которомъ будетъ видѣнъ лишь старый текстъ. *В. Г.*

Утилизація двигательной силы волнъ. Съ цѣлью воспользоваться двигательной силой волнъ были произведены весьма интересные опыты въ Сѣв. Амер. Соединенныхъ Штатахъ, на одной изъ станцій для морскихъ купаній, на берегу Нью-Джерсея. Существенная часть употре-

бленнаго для этого прибора состояла изъ поплавка вѣсомъ въ 1150 килогр., къ которому прикрѣпленъ былъ конецъ кабеля, перекинутаго черезъ блоки и снабженнаго на другомъ концѣ противовѣсомъ въ 900 килогр. Къ этому противовѣсу прикрѣпленъ былъ другой кабель, также перекинутый черезъ блокъ и соединенный другимъ своимъ концомъ съ поршнемъ насоса, накачивавшаго воду въ особый резервуаръ. Ходъ поршня равнялся 1,83 метр., а діаметръ цилиндра насоса—15 центим. Когда волна поднимала поплавокъ, противовѣсъ опускался, поднимая поршень. При опусканіи поплавка противовѣсъ поднимался, а поршень опускался отъ собственной тяжести. При помощи этого приспособленія удавалось при обыкновенныхъ условіяхъ накачивать въ резервуаръ 54,000 куб. метр. воды въ теченіе семи рабочихъ часовъ.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Перемѣнные электрическіе токи. Руководство для студентовъ и техниковъ *Т. Г. Блекслея*, профессора королевской морской коллегіи въ Гринвичѣ. Переводъ съ французскаго, свѣренный съ 3 изданіемъ: „Papers on alternating currents of Electricity by T. H. Blakesley". Подъ редакціей В. К. Лебединскаго, дополненный авторомъ для русскаго изданія. Съ 55 рисунками. Спб. Изд. К. Л. Риккера. 1894. Ц. 1 р. 60 к.

Les formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme et de leur différence d'apès le numéro de ces nombres. *I. Pervouchine*, prêtre au district Chadrinsk (Perm). Kasan, 1894.

Къ вопросу о термодинамическомъ потенціалѣ. *Н. Шиллера.* Отд. отт. изъ VII тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія. Москва. 1894.

О вліяніи внѣшняго давленія, приложеннаго къ поверхности раздѣла жидкости и ея пара, на упругость этого послѣдняго. *Н. Шиллера.* Отд. отт. изъ VII тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія. Москва. 1894.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ 18$^{93}/_{94}$ Г.

Одесскій Учебный Округъ.

Гимназіи:

Николаевская.

1) *Алгебра:* Два плотника, изъ которыхъ второй начинаетъ работать $1^1/_2$ днями позже перваго, могутъ сколотить заборъ въ 7 дней; если бы эта работа была поручена каждому отдѣльно, то первому для совершенія ея понадобилось бы тремя днями болѣе, чѣмъ второму. Во сколько дней каждый плотникъ отдѣльно можетъ сколотить заборъ?

2) *Геометрія:* Объемъ шара $v = 317,28$ куб. ф. Опредѣлить объемъ его сектора, у котораго центральный уголъ въ осевомъ сѣченіи $\alpha = 56^0 20' 34''$.

Одесская 1-ая (Ришельевская).

1) *Алгебра:* Четвертый и седьмой члены возрастающей ариѳметической прогрессіи равны корнямъ уравненія: $x^2 - 50x + 589 = 0$; сумма всѣхъ членовъ $= 403$. Опредѣлить число членовъ.

2) *Геометрія:* Опредѣлить объемъ прямого конуса, осевое сѣченіе котораго имѣетъ площадь $Q = 13$ кв. ф., а уголъ при вершинѣ $\alpha = 28^\circ 27'$.

Одесская 2-ая.

1) *Алгебра:* Число учениковъ въ учебномъ заведеніи равно 156; число учениковъ въ I классѣ равно коэффиціенту при восьмомъ членѣ разложенія $(x + 1)^9$, а въ каждомъ слѣдующемъ классѣ менѣе, чѣмъ въ предыдущемъ, на n учениковъ, гдѣ n—число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія: $14x + 25y = 1153$. Сколько классовъ въ учебномъ заведеніи?

2) *Геометрія:* Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC, площадь котораго S равняется 545,3 кв. д., уголъ B, заключающійся между равными сторонами AB и BC, содержитъ $68^0 48'$. Опредѣлить поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ этого треугольника около прямой, проведенной черезъ вершину B параллельно сторонѣ AC.

Одесская 3-ья.

1) *Алгебра:* Два путешественника отправились другъ другу на встрѣчу изъ городовъ, отстоящихъ одинъ отъ другого на 425 в. Проѣхавши число дней, равное разности между числами верстъ, проѣзжаемыхъ ими въ день и встрѣтившись, путешественники узнаютъ, что одинъ изъ нихъ проѣхалъ на 25 в. больше другого. Сколько верстъ каждый проѣзжаетъ въ день?

2) *Геометрія*: Въ шаръ, поверхность котораго $B = 240,15$ кв. ф., вписанъ конусъ. Образующая конуса наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $\alpha = 52^0 17' 15''$. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

Симферопольская.

1) *Алгебра:* Помѣщикъ купилъ на ярмаркѣ коровъ и воловъ и заплатилъ за нихъ столько десятирублевыхъ кредитныхъ бумажекъ, сколько единицъ заключается въ меньшемъ корнѣ уравненія: $z^2 - 318z + 24056 = 0$. За каждую корову онъ заплатилъ столько 10-рублевыхъ кредитокъ, сколько единицъ заключается въ меньшемъ изъ двухъ послѣдовательныхъ чиселъ, а за вола столько такихъ же кредитокъ, сколько единицъ заключается въ слѣдующемъ по порядку изъ двухъ упомянутыхъ послѣдовательныхъ чиселъ. Меньшее изъ этихъ послѣдовательныхъ чиселъ равно положительному корню уравненія: $x^2 + 2x - 63 = 0$. Сколько коровъ и сколько воловъ купилъ помѣщикъ?

2) *Геометрія:* Въ правильномъ 27-угольникѣ апоѳема короче радіуса описаннаго круга на 0,064786 вершка. Опредѣлить радіусъ описаннаго круга.

Херсонская.

1) *Алгебра:* Рѣшить квадратное уравненіе; $ax^2+bx=\frac{383,9421}{c}$, въ которомъ коэффиціентъ $a=$ числу членовъ ариѳметической прогрессіи, имѣющей первымъ членомъ 2, разностью $1\frac{1}{2}$ и суммою этихъ членовъ $104\frac{1}{2}$; коэффиціентъ $b=$ предѣлу суммы членовъ безконечно-убывающей прогрессіи, первый членъ которой $=5$, и знаменатель 0,(285714); число $c=$ числу, обыкновенный логариѳмъ котораго равенъ $-\frac{3}{8}$.

2) *Геометрія:* Изъ двухъ параллельныхъ сторонъ трапеціи большая $AB=a$, меньшая $DC=b$, прилежащіе углы къ большей изъ параллельныхъ сторонъ суть $DAB=\alpha$, $\angle CBA=\beta$. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ этой трапеціи около стороны AB. Вычислить этотъ объемъ, полагая $a=35,875$; $b)=17,325$; $\angle\alpha=50^0 30' 30''$; $\angle\beta=32^0 40' 40''$.

Московскій учебный округъ.

Иваново-Вознесенское реальное училище.

VII кл. *Приложеніе алгебры къ геометріи:* Внѣ круга, радіусъ коего $=R$, дана точка, разстояніе которой отъ центра круга $=a$. Черезъ данную точку провести сѣкущую къ кругу, такъ чтобы внутренняя часть ея равнялась данной длинѣ b.

Алгебра: Вычислить съ точностью до 0,01 выраженіе $a+b\sqrt{7}$, гдѣ $a=$ дѣйствительной части комплекснаго выраженія

$$[2(\cos 15^0+\sin 15^0 . \sqrt{-1})]^4,$$

а b равно тому значенію x, при которомъ выраженіе

$$(19-7x).(7x-9)$$

имѣетъ наибольшую величину.

VI кл. *Ариѳметика:* Нѣкоторый капиталъ выражается числомъ рублей, состоящимъ изъ трехъ цифръ, сумма которыхъ $=18$. Число сотенъ этого трехзначнаго числа относится къ числу его десятковъ какъ 1:0,75, а число десятковъ къ числу единицъ какъ 0,1(9): $\frac{2}{15}$. На сколько времени должно отдать упомянутый капиталъ въ ростъ по 4 простыхъ годовыхъ процента, чтобы получить съ него 43 р. 20 к. процентныхъ денегъ.

Геометрія: 1. Площадь квадрата, вписаннаго въ основаніе круглаго прямого конуса, равна полной поверхности куба, объемъ котораго $=v$. Отношеніе высоты конуса къ радіусу его основанія $=m:n$. Опредѣлить объемъ конуса.

2. Опредѣлить объемъ правильной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, зная, что площадь діагональнаго сѣченія пирамиды $=6\sqrt{2}$ кв. дюйм., а апоѳема пирамиды $=\sqrt{13}$ дюйм.

Алгебра: 1. Написать геометрическую прогрессію, у которой сумма членовъ, стоящихъ на мѣстахъ четнаго порядка $=150$, а сумма членовъ, находящихся на мѣстахъ нечетнаго порядка, $=50$, число-же

всѣхъ членовъ ея равно первому члену такой ариѳметической прогрессіи, у которой сумма второго и четвертаго членовъ $= 20$, а сумма третьяго и шестого $= 29$.

2. Подставить въ выраженіе: $\frac{3717 + b}{404 + c}$ вмѣсто b коэффиціентъ пятаго члена разложенія $(x + a)^{16}$, вмѣсто c число сочетаній изъ 15 элементовъ по 4, обратить полученную простую дробь въ непрерывную, найти всѣ подходящія дроби этой послѣдней и опредѣлить затѣмъ предѣлъ той ошибки, которую мы дѣлаемъ, принимая пятую подходящую дробь за равную данной простой дроби.

Тригонометрія: По данной площади тр-ка, равной 547,57 кв. фут. и по даннымъ угламъ $A = 103^\circ 18'$, $B = 23^\circ 23' 22''$ опредѣлить стороны этого треугольника.

ЗАДАЧИ.

№ 126. *ABC* есть равнобедренный треугольникъ, вершина котораго *A*; произвольная прямая опирается своими концами *D* и *E* на равныя стороны, D_1E_1 — ея проекція на основаніе *AB*; черезъ средину *F* прямой *ED* проведена параллельно основанію прямая *GH*, ограниченная равными сторонами. Доказать, что $GH = D_1E_1$.

А. Гольденбергъ (Спб.).

№ 127. Доказать, что прямая *DE*, проходящая черезъ середину *D* гипотенузы *BC* прямоугольнаго треугольника *ABC* и черезъ одну изъ точекъ *E*, въ которыхъ катетъ *AB* дѣлится на три равныя части, отсѣкаетъ на продолженіи катета *AC* отрѣзокъ $C_1A = AC$.

В. Захаровъ (Саратовъ).

№ 128. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Собранія вопросовъ и задачъ прямолинейной тригонометріи" Верещагина, изд. 2, № 650):

„Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, равенъ h дюйм. и дѣлитъ прямой уголъ на части, изъ которыхъ одна въ три раза болѣе другой. Опредѣлить гипотенузу, оба катета и площадь".

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 129. Рѣшить уравненіе:

$$\operatorname{tg}x . \operatorname{tg}^2 2x . \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 3x.$$

И. Ок—чъ (с. Голле).

№ 130. Въ какой системѣ счисленія число 57896, написанное по десятичной системѣ, изобразится черезъ 3323041?

А. Бачинскій (Холмъ).

№ 131. Показать, что

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\sqrt{a^8+\ldots}}}}\;\sqrt{a-\sqrt{a^2-\sqrt{a^4-\sqrt{a^8-\ldots}}}}=a.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 467 (2 сер.). Разность кубовъ двухъ сосѣднихъ подходящихъ дробей равна 27360:3511808. Опредѣлить эти дроби.

Такъ какъ $\sqrt[3]{3511808}=152=8.19$ и знаменатели искомыхъ дробей должны быть взаимно простыми, то они суть 8 и 19. Пусть x и y будутъ числители. Тогда

$$\frac{x^3}{19^3}-\frac{y^3}{8^3}=\left(\frac{x}{19}-\frac{y}{8}\right)\left(\frac{8^2x^2+8.19.xy+19^2y^2}{19^2.8^2}\right)=\frac{27360}{3511808}.$$

Но такъ какъ $8x-19y=1$, то задача приводится къ системѣ двухъ уравненій:

$$64x^2+152xy+361y^2=27360,$$

$$8x-19y=1,$$

откуда $x=12$, $y=5$, т. е. искомыя дроби суть $^{12}/_{19}$ и $^5/_8$.

К. Щиголевъ (Курскъ).

№ 517 (2 сер.). Доказать, что основанія прямыхъ, проведенныхъ въ одномъ смыслѣ изъ какой нибудь точки M окружности, описанной около треугольника ABC, къ сторонамъ его подъ даннымъ угломъ α, лежатъ на одной прямой (Обобщеніе теоремы о прямой Симсона).

Пусть (фиг. 36) $\angle MaB=\angle MbA=\angle McA=\angle\alpha$. Соединивъ точку M съ A и B и замѣтивъ, что около четыреугольниковъ $AMcb$, $MaBc$ и $MaCb$ можно описать круги, находимъ

$$\angle bMa+\angle C=2d,$$

$$\angle AMB+\angle C=2d,$$

откуда $\angle bMa=\angle AMB$, а потому $\angle aMB=\angle AMb$. Но такъ какъ $\angle aMB=\angle acB$ и $\angle AMb=\angle Acb$, то

$$\angle Acb=\angle acB,$$

откуда, очевидно, слѣдуетъ, что точки b, c и a лежатъ на одной прямой.

Фиг. 36.

Легко показать, что эта теорема имѣетъ и свою обратную: *если основанія прямыхъ, проведенныхъ изъ точки* M *въ одномъ смыслѣ подъ*

равными углами къ сторонамъ треугольника ABC *лежатъ на одной прямой, то точка* M *лежитъ на описанной около треугольника* ABC *окружности.*

Дѣйствительно, такъ какъ около четыреугольника $MaCb$ можно описать кругъ, то $\angle aMb + \angle C = 2d$; такъ какъ около четыреугольника $AMcb$ можно описать кругъ, то $\angle Acb = AMb$ и точно такъ же $\angle aMB = \angle acB$. Но $\angle acB = \angle Acb$; слѣдовательно $\angle AMb = \angle aMB$ и $\angle aMb = \angle AMB$, а потому $\angle AMB + \angle C = 2d$, т. е. точка M лежитъ на описанной около треугольника ABC окружности.

В. Ахматовъ (Тула); *М. Окасъ* (Мерьяма); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 582 (2 сер.). Построить треугольникъ, если извѣстенъ радіусъ внутренняго вписаннаго круга и двухъ внутреннихъ круговъ, касательныхъ каждый къ первому и къ двумъ сторонамъ треугольника.

Построивъ двѣ касающіяся внѣшне окружности O и O_1 радіусовъ, соотвѣтственно равныхъ радіусамъ внутренняго вписаннаго въ искомый треугольникъ круга и внутренняго, касательнаго къ двумъ сторонамъ, и проведя ихъ общія внѣшнія касательныя, продолжимъ эти послѣднія до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ A. Затѣмъ третьимъ даннымъ радіусомъ описываемъ окружность O_2, касательную къ окружности O и продолженію одной изъ внѣшнихъ касательныхъ, пересѣкающихся въ A. Остается провести вторую общую касательную къ окружностямъ O и O_2.

В. Абрамовичъ (Сѣдлецъ); *И. Себряковъ, В. Ушаковъ* (ст. Усть-Медвѣдицкая); *Н. Кузнецовъ, А. Треумовъ* (Ив.-Вознесенскъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

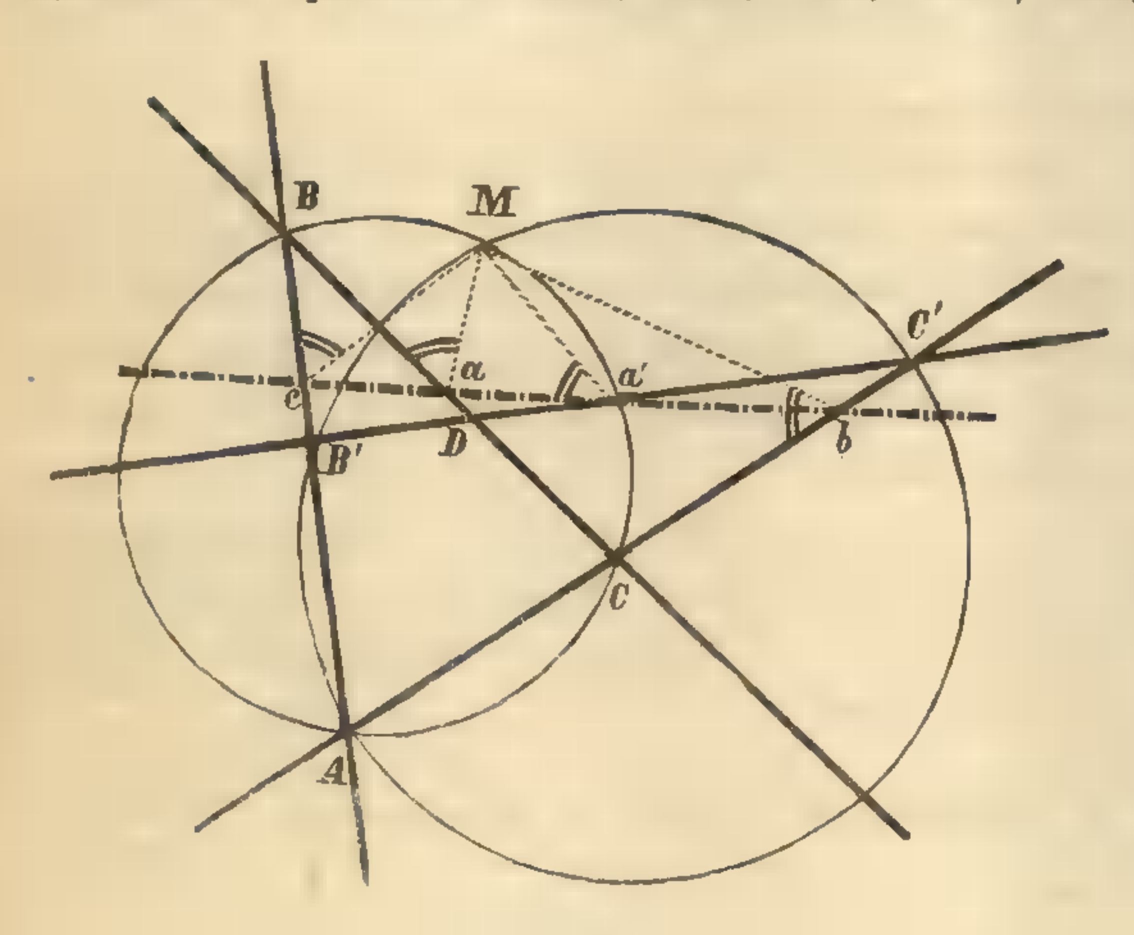
№ 583 (2 сер.). Показать, что каждыя двѣ вершины треугольника и основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нихъ на противоположныя стороны, лежатъ на одной окружности. По даннымъ сторонамъ треугольника вычислить радіусы трехъ получающихся такимъ образомъ окружностей и разстоянія ихъ центровъ.

Если на каждой изъ сторонъ треугольника опишемъ какъ на діаметрѣ окружность, то очевидно, что окружность эта пройдетъ черезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ прилежащихъ вершинъ на противоположныя стороны. Поэтому искомые радіусы равны половинамъ сторонъ треугольника, а разстояніе центровъ каждыхъ двухъ окружностей, описанныхъ на двухъ сторонахъ треугольника, равно половинѣ третьей стороны.

В. Абрамовичъ (Сѣдлецъ); *И. Себряковъ, В. Ушаковъ* (ст. Усть-Медвѣдицкая); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *С. Окуличъ* (Варшава).

№ 17 (3 сер.). Въ плоскости даны четыре прямыя. Найти въ той же плоскости такую точку, чтобы точки пересѣченія прямыхъ, проведенныхъ изъ нея подъ однимъ угломъ къ каждой изъ данныхъ прямыхъ, съ данными прямыми лежали на одной прямой.

Извѣстно, что геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что основанія прямыхъ, проведенныхъ изъ нихъ въ одномъ смыслѣ къ сторонамъ треугольника ABC подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, лежатъ на одной прямой,—есть описанная около треугольника ABC окружность (см. рѣшеніе задачи № 517 (2 сер.), напечатанное въ этомъ же № „Вѣстника"). Поэтому для рѣшенія задачи описываемъ окружности около двухъ какихъ либо треугольниковъ, составленныхъ данными прямыми AB, AC, BC, $B'C'$, напр. около треугольниковъ ABC и $AB'C'$ (фиг. 37). Точка M ихъ пересѣченія и будетъ, очевидно, искомой точкой. Задача всегда возможна и имѣетъ одно рѣшеніе, что не трудно видѣть, ибо если вмѣсто треугольниковъ ABC и $AB'C'$ возьмемъ напр. треугольники $BB'D$ и $CC'D$, то, на основаніи теоремы, обратной той, которая предложена въ задачѣ № 517 (2 сер.), описанныя около нихъ окружности пройдутъ черезъ точку M.



Фиг. 37.

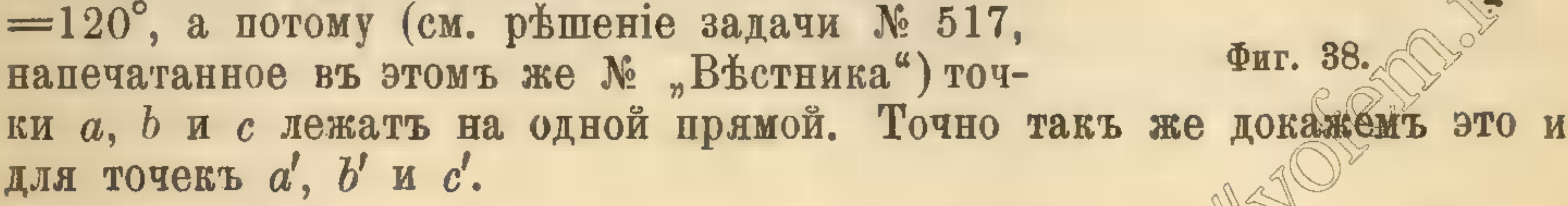
В. Ахматовъ (Тула).

№ 39 (3 сер.). Въ окружность вписанъ равносторонній треугольникъ ABC (фиг. 38). Черезъ точку M окружности проведены три прямыя, параллельныя сторонамъ треугольника, до встрѣчи съ каждой изъ непараллельныхъ сторонъ или съ ея продолженіемъ. Показать, что три точки a, b, c изъ шести, полученныхъ такимъ образомъ, лежатъ на одной прямой, а три другія (a', b', c')— на другой.

Фиг. 38.

Такъ какъ треугольники Maa' и Mcc' равносторонни, то $\angle MaB = MbA = 180° - \angle McA = 120°$, а потому (см. рѣшеніе задачи № 517, напечатанное въ этомъ же № „Вѣстника") точки a, b и c лежатъ на одной прямой. Точно такъ же докажемъ это и для точекъ a', b' и c'.

Я. Блюмбергъ (Рига); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).



№ 42 (3 сер.). Построить треугольникъ по даннымъ сторонѣ, противолежащему углу и разности квадратовъ медіанъ двухъ другихъ сторонъ.

Обозначимъ данную сторону черезъ b, а разность квадратовъ медіанъ двухъ другихъ сторонъ черезъ k^2. Если a и c суть двѣ другія стороны треугольника, а m_a и m_c ихъ медіаны, то

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2},$$

$$b^2+a^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2};$$

вычитая второе равенство изъ перваго, получимъ:

$$c^2-a^2={}^4/_3\,(m_a^2-m_c^2)={}^4/_3\,k^2.$$

Извѣстно, что геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, разность квадратовъ разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ равна квадрату данной прямой, есть прямая, перпендикулярная къ прямой, соединяющей данныя точки. Поэтому для рѣшенія задачи описываемъ изъ концовъ данной стороны треугольника дуги радіусами, равными гипотенузѣ и одному изъ катетовъ такого прямоугольнаго треугольника, квадратъ другого катета котораго равенъ ${}^4/_3\,k^2$. Перпендикуляръ, опущенный изъ точки пересѣченія этихъ дугъ на данную сторону и будетъ такимъ геометрическимъ мѣстомъ. Третья вершина искомаго треугольника опредѣлится его пересѣченіемъ съ дугою, описанной на данной сторонѣ и вмѣщающей данный уголъ.

И. Барковскій (Могилевъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *Г. Сивчинскій* (Варшава); *Э. Заторскій* (Могилевъ н. Д.).

№ 43 (3 сер.). Подвижной шарикъ B однонитныхъ вѣсовъ Кулона отклоняется отъ неподвижнаго шарика A на 20°, если сообщить A и B данное число электрическихъ единицъ. Пусть зарядъ A уменьшенъ въ 3 раза, а B — въ 2 раза. Какъ станетъ шарикъ B? На сколько придется закрутить нить, чтобы показать уменьшеніе отталкивательной силы въ 6 разъ?

Если шарикамъ A и B сообщены заряды въ m_1 и m_2 электрическихъ единицъ, а дуга $AB=20^0$, то отталкивательная сила

$$f_{20}=\frac{m_1\,m_2}{20^2}.$$

Во второмъ случаѣ шарикъ B перейдетъ въ положеніе B_1 и если дуга $AB_1=x$, то отталкивательная сила

$$f_x=\frac{m_1\,m_2}{6x^2}.$$

Такъ какъ сила крученія (она же и отталкивательная сила) пропорціональна углу, то

$$f_{20}:f_x=20:x,$$

откуда

$$x=\frac{20\sqrt[3]{36}}{6}=11^0\ (\text{съ точн. до } {}^1/_{3000}).$$

Чтобы перевести шарикъ изъ B_1 обратно въ B, надо закрутить нить по направленію отъ B_1 къ B на такое число y градусовъ, чтобы

$$20^0 - (11^0 + y) = 20^0 : 6 = 3\,{}^1/{}_3{}^0,$$

откуда $y = 5\,{}^2/{}_3{}^0$.

А. Варенцовъ (Ростовъ н. Д.).

№ 45 (3 сер.). Начертить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы периметръ всякаго вписаннаго въ него прямоугольника былъ величиной постоянной.

Пусть ABC есть равнобедренный треугольникъ, удовлетворяющій требованіямъ задачи, $MNPD$ и $M'N'P'D$ (фиг. 39) половины двухъ вписанныхъ въ него прямоугольниковъ. По условію задачи

$$M'N' + 2N'P' = MN + 2NP,$$

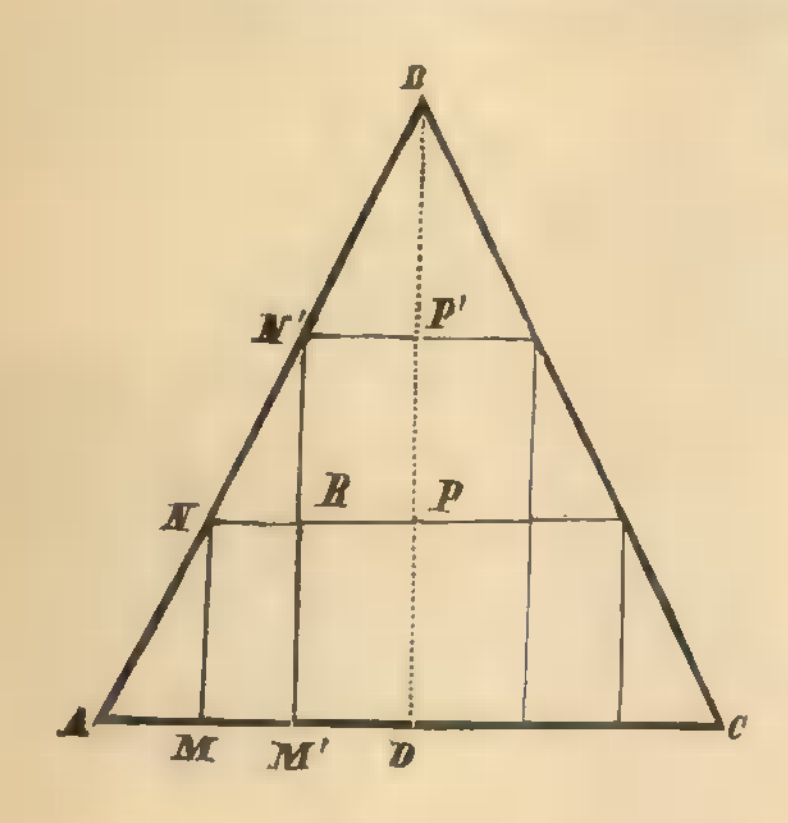
откуда

$$M'N' - MN = N'R = 2(NP - N'P') = 2NR,$$

а такъ какъ $\triangle ABD \infty \triangle NN'R$, то и

$$BD = 2AD = AC,$$

т. е. въ искомомъ треугольникѣ высота равна основанію.



Фиг. 39.

Я. Блюмбергъ (Рига); *А. Варенцовъ* (Шуя). *М. Веккеръ* (Винница).

№ 46 (3 сер.). Окружность касается непараллельныхъ сторонъ равнобочной трапеціи и дѣлитъ каждую изъ параллельныхъ сторонъ на три равныя части. Требуется 1) построить такую трапецію по данному радіусу R окружности и длинѣ a хорды, соединяющей точки касанія, и 2) вычислить ея стороны и площадь.

1) Въ данный кругъ вписываемъ хорду $AB = a$ и проводимъ черезъ точки A и B касательныя къ кругу. Продолживъ эти касательныя до пересѣченія ихъ въ точкѣ C, изъ C проводимъ двѣ прямыя, дѣлящія AB на три равныя части. Остается лишь соединить надлежащимъ образомъ точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью.

2) Пусть $MNPQ$ (фиг. 40) есть удовлетворяющая требованіямъ задачи трапеція, O центръ даннаго круга, $AB = a$, $OT = R$, $BK \perp PQ$, $OR \perp PQ$, $PT = x$. Тогда

$$OR = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}},\ OS = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ и } RS = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$PK = \frac{3x - a}{2},\ \overline{PB}^2 = 2x^2.$$

Изъ треугольника PBK находимъ:

$$\overline{PB}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{PK}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{RS}^2$$

или $2x^2 = \frac{(3x-a)^2}{4} + \left(\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2$,

откуда

$$x_1 = \frac{3aR^2 + aR\sqrt{8R^2 - 2a^2}}{2a^2 + R^2};$$

$$x_2 = \frac{3aR^2 - aR\sqrt{8R^2 - 2a^2}}{2a^2 + R^2};$$

Фиг. 40.

x_1 есть третья часть одной изъ параллельныхъ сторонъ, x_2—другой.

Такъ какъ $BP = 2x_1^2$ и $BN = 2x_2^2$, то

$$BP + BN = NP = (x_1 + x_2)\sqrt{2} = \frac{6aR^2\sqrt{2}}{2a^2 + R^2}.$$

Далѣе легко найдемъ высоту трапеціи

$$\frac{3a^2R\sqrt{2}}{2a^2 + R^2}$$

и площадь ея, равную $\frac{27a^3R^3\sqrt{2}}{(2a^2+R^2)^2}$.

Я. Блюмбергъ (Рига).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 112, 116 (3 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) 110, 118, 119 (3 сер.), 532 (2 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 39, 113 (3 сер.), 473, 517 (2 сер.), 452 (1 сер.); *А. Дмитріевскаго* (Цивильскъ) 19, 83, 98, 104, 108, 110 (3 сер.); *учениковъ 3 класса Цивильскаго уѣздн. учил.* 83 (3 сер.); *И. Барковскаго* (Могилевъ) 95, 105, 112, 118 (3 сер.); *ученика Кіево-Печерской гимн.* 81, 82, 83, 85, 105 (3 сер.); *А. Бачинскаго* (Холмъ) 105, 108. 110, 112, 115, 119 (3 сер.); *А. Павлычева* (Ив.-Вознесенскъ) 77, 87, 92, 93, 105, 110, 112, 113 (3 сер.); *Т—ва* (Тамбовъ) 108 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Могилевъ) 105 (3 сер.); *М. Архангельскаго* (Ловичъ) 108, 112 (3 сер.); *Н. Кузнецова* (Ив.-Вознесенскъ) 35, 81, 82, 83, 85, 98 (3 сер.).



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 22-го Декабря 1894 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІИ.

Острогорскій, А. Н. Среди природы. Разсказы о явленіяхъ природы. Съ рисунками. Изд. 3-е, исправл., книжн. магазина П. Луковникова. Спб.

Фроловъ, А. Приложеніе алгебры къ геометріи и начала аналитической геометріи на плоскости. Часть II. Начала аналитической геометріи на плоскости. По программѣ кадетскихъ корпусовъ. Изд. 6-е. Спб. 1895. Ц. 1 р. 25 к.

Юревичъ, Г. Я. Курсъ элементарной алгебры и систематическій сборникъ алгебраическихъ задачъ. Часть I. Юрьевъ. 1894. Ц. 80 к.

Болла, Р. Страна звѣздъ. Внутреннія планеты. Переводъ съ англійскаго, со множествомъ рисунковъ. Изд. „Народной Библіотеки" Маракуева. Москва. 1894. Ц. 20 к.

Воздухъ насъ окружающій. Изд. редакціи журнала „Досугъ и Дѣло". Спб. 1894.

Гольдгаммеръ, Д. А. Къ теоріи размѣрности электрическихъ количествъ (Сообщено на IX съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей). Казань.

Dedekind, Richard, проф. Непрерывность и ирраціональныя числа. Съ нѣмецкаго языка перевелъ С. Шатуновскій (Отд. отт. изъ журнала: „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса. 1894.

Ивановъ, Александръ (Стронинъ). Разсказы о землѣ и о небѣ. Съ рис. въ текстѣ (Природа и люди). Изд. 5-е, исправленное, книжн. склада А. Калмыковой. Спб. 1894.

Метеорологическое Обозрѣніе. Труды метеорологической сѣти юго-запада Россіи въ 1893 году. Вып. VI. А. Клоссовскаго Одесса. 1894.

Низшія механико-техническія училища. Спб. 1894.

Николаевскій, Ив. Руководство къ изученію главныхъ основаній педагогики въ учительскихъ семинаріяхъ Министерства Народнаго Просвѣщенія. Дидактическая пропедевтика. Курсъ II класса. Изд. 3-е книжн. магазина М. Наумова Москва. 1894. Ц. 50 к.

Отчетъ и протоколы физико-математическаго общества при Имп. университетѣ св. Владиміра за 1893 годъ (Отт. изъ „Университетскихъ Извѣстій" за 1894 г.). Кіевъ. 1894.

Рубанцевъ, Н. Разсказы о великихъ и грозныхъ явленіяхъ природы. („Природа и Люди" № 7). Изд. 2-е книжн. склада А. Калмыковой. Спб. 1894.

Рябковъ, Г. З. Опытъ методики рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. Приложеніе къ „Сборнику геометрическихъ задачъ на построеніе". Пособіе для преподавателя (Съ 280 чертеж. въ текстѣ). Изд. Г. Рябкова. Одесса. 1894.

Рябковъ, Г. З. Сборникъ геометрическихъ задачъ на построеніе. Для среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. Г. Рябкова. Одесса. 1894.

Таблицы для перевода русскихъ мѣръ въ метрическія и обратно. Съ приложеніемъ таблицъ математическихъ (Путиловскій заводъ) Спб. 1894.

Фокусы и опыты или замѣчательныя явленія, вызываемыя общедоступными средствами. Въ 5-ти отдѣлахъ, съ рисунками. Москва. 1894. Ц. 50 к.

Александровъ, И. Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе и сборникъ геометрическихъ задачъ съ полными и краткими рѣшеніями. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній (для старшихъ классовъ). Изд. 5-е, исправленное, книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 1 р., съ перес 1 р. 20 к.

Васильевъ-Яковлевъ, Н. П. Коммерческая ариѳметика въ связи съ коммерческою экономіею. Курсъ реальныхъ училищъ. Составл. по программѣ М-ства Народнаго Просвѣщенія. Изд. 3-е. Кіевъ. 1894, Ц. 1 р. 40 к.

Коломійцевъ, Н. Электричество и растенія. Опытъ библіографіи. Спб. 1894.

Комаровъ, А. Ф. Ариѳметическій задачникъ для начальныхъ городскихъ и сельскихъ училищъ. Вып. I. Задачи, примѣры и вопросы на числа первой сотни. Изд. 3-е книжн. магазина К. Тихомирова. Москва. 1894. Ц. 15 к.

Махъ, Е. Ученіе объ электричествѣ и магнитизмѣ въ элементарномъ изложеніи. Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. Л. Геймана (Изъ „Почтово-телеграфнаго Журнала"). Спб 1894.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ НѢМЕЦКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Математика.

Sachs, J., Prof., Dr. Lehrbuch der ebenen Elementargeometrie. (Planimetrie). 6. Tl. Proportionalität der Strecken. Bearb. nach System Kleyer. gr. 8⁰. (VIII + 175 m. 90 Fig.). Stuttgart. J. Maier. M. 4,00.

Scheffler, Herm., Dr. Beleuchtung und Beweis eines Satzes aus Legendre's Zahlentheorie. gr. 8⁰ (40 S.). Leipzig. F. Foerster. M. 1,00.

Tschumi, Joh. Ein Beitrag zur Geschichte und. Discussion der Cycloiden. Diss. gr. 8⁰ (48 S. m. 1 Taf.). Bern. H. Koerber. M. 1,50.

Heinitz, Geo. Elementare Berechnung der Zahl μ, welche den quadratischen Restcharakter bestimmt. Diss. gr. 8⁰. Göttingen. Vandenhoeck, & Ruprecht. M. 1.00.

Kohn, Gust. Privatdoc., Dr. Ueber eine Eigenschaft der Invarianten von Covarianten. Lex- 8⁰ (13 S.) Wien. F. Tempsky. M. 0,30.

Sobotka, J. Ueber Berührungscurven der Schraubungsregelflächen mit umschriebenen Cylinderflächen. gr. 8⁰ (38 S. m. 2 Taf.) Prag. F. Rivnác. M. 1,20.

Speckmann, G. Beiträge zur Zahlenlehre. gr. 8⁰ (V + 64). Oldenburg, Eschen & Fasting. M. 2,00.

Thompson, Henry Dallas. Hyperelliptische Schnittsysteme und Zusammenordung der algebraischen und transcendentalen Thetacharakteristiken. Diss. gr. 4⁰. (33 S. m. Fig.). Baltimore, Göttingen.—Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2,00.

Weierstrass, K. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Hrn. K. W. bearb. u. hrsg. von H. A. Schwarz. 2. Ausg. 1. Abth. gr. 4⁰. (XII + 96) Berlin. J. Springer. M. 10,00.

Deter, Chr., Joh. Dr. Repetitorium der Differential und Integralrechnung. 3. Aufl. 8⁰ (119 S. m. Fig.) Berlin. M. Rockenstein. M. 2,00.

Thannabaur, Jos., Ob.-Realsch.-Prof. Berechnung von Renten und Lebens-Versicherungen. An der Hand von Beispielen erläutert. gr. 8⁰ (III + 135) Wien.. M. Graeser. M. 3,00.

Dirichlet, P. G. Legeune. Vorlesungen über Zahlentheorie. Hrsg. und mit. Zusätzen versehen von. Prof. R. Dedekind. 4. Aufl. gr. 8⁰ (XVII + 657) Braunschweig. F. Vieweg & Sohn. M. 14,00.

Molenbroek, P., Privatdoc., Dr. Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie. gr. 8⁰ (XV + 257 + 8) Leiden. E. J. Brill. M. 7,00.

Cantor, Mor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 1. Bd. Von den ältesten Zeiten bis zum J. 1200 n. Chr. 2. Aufl. gr. 8⁰ (VII + 883 m. 114 Fig. u. 1. lith. Taf.) Leipzig. B. G. Teubner. M. 22,00.

Durège, H., Prof. i. R., Dr. Elemente der Theorie der Funktionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besond. Berücksicht. der Schöpfungen Riemann's bearb. 4. Aufl. gr. 8⁰ (X + 300). Leipzig. B. G. Teubner. M. 6,80.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3 Bd. 4. Hft. Red. v. Jaerisch, Köpcke und Schröder. gr. 8⁰ (S. 167 — 192). Leipzig. B. G. Teubner. M. 1,00.

Schotten, Heinr., Dr. Inhalt u. Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleich. Planimetrie. 2 Bd. gr. 8⁰ (IV + 410) Leipzig. B. G. Teubner. M. 8,00.

Descartes, René. Die Geometrie. Deutsch hrsg. von Ludw. Schlesinger. gr. 8⁰ (XI + 116 m. 2 Taf.) Berlin. Mayer u. Müller. M. 2,60.

Heffter, Lothar, Prof., Dr. Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit e. unabhängigen Variabeln. gr. 8⁰ (XIV + 258 m. 3 Fig.) Leipzig. B. G. Teubner. M. 6,00.

Katalog der auf Hamburger Biblioteken vorhandenen Litteratur aus der reinen und angewandten Mathematik und Physik. Hrsg. von der mathemat. Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jähr. Jubelfestes. 1. Nachtrag. gr. 8⁰ (88). Hamburg. Verlagsanstalt u. Druckerei. M, 2,00.

Приложенiе къ „Вѣстнику Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Таблица нечетныхъ составныхъ чиселъ (отъ 3269 до 3827).

(*Продолженiе* *).

3269	7.467	3383	17.199	3489	3.1163	3605	5.7.103	**3721**	61^2
3273	3.1091	3385	5.677	3493	7.499	3609	$3^2.401$	3723	3.17.73
3275	$5^2.131$	3387	3.1129	3495	3.5.233	3611	23.157	3725	$5^2.149$
3277	29.113	3393	$3^2.13.29$	3497	13.269	3615	3.5.241	3729	3.11.113
3279	3.1093	3395	5.7.97	3501	$3^2.389$	3619	7.11.47	3731	7.13.41
3281	17.193	3397	43.79	3503	31.113	3621	3.17.71	3735	$3^2.5.83$
3283	$7^2.67$	3399	3.11.103	3505	5.701	3625	$5^3.29$	3737	37.101
3285	$3^2.5.73$	3401	19.179	3507	3.7.167	3627	$3^2.13.31$	3741	3.29.43
3287	19.173	3403	41.83	3509	$11^2.29$	3629	19.191	3743	19.197
3289	11.13.23	3405	3.5.227	3513	3.1171	3633	3.7.173	3745	5.7.107
3291	3.1097	3409	7.487	3515	5.19.37	3635	5.727	3747	3.1249
3293	37.89	3411	$3^2.379$	3519	$3^2.17.23$	3639	3.1213	3749	23.163
3295	5.659	3415	5.683	3521	7.503	3641	11.331	3751	$11^2.31$
3297	3.7.157	3417	3.17.67	3523	13.271	3645	$3^6.5$	3753	$3^3.139$
3303	$3^2.367$	3419	13.263	3525	$3.5^2.47$	3647	7.521	3755	5.751
3305	5.661	3421	11.311	3531	3.11.107	3649	41.89	3757	13.17^2
3309	3.1103	3423	3.7.163	3535	5.7.101	3651	3.1217	3759	3.7.179
3311	7.11.43	3425	$5^2.137$	3537	$3^3.131$	3653	13.281	3763	53.71
3315	3.5.13·17	3427	23.149	3543	3.1181	3655	5.17.43	3765	3.5.251
3317	31.107	3429	$3^3.127$	3545	5.709	3657	3.23.53	3771	$3^2.419$
3321	$3^4.41$	3431	47.73	3549	$3.7.13^2$	3661	7.523	3773	$7^3.11$
3325	$5^2.7.19$	3435	3.5.229	3551	53.67	3663	$3^2.11.37$	3775	$5^2.151$
3327	3.1109	3437	7.491	3553	11.17.19	3665	5.733	3777	3.1259
3333	3.11.101	3439	19.181	3555	$3^2.5.79$	3667	19.193	3781	19.199
3335	5.23.29	3441	3.31.37	3561	3.1187	3669	3.1223	3783	3.13.97
3337	47.71	3443	11.313	3563	7.509	3675	$3.5^2.7^2$	3785	5.757
3339	$3^2.7.53$	3445	5.13.53	3565	5.23.31	3679	13.283	3787	7.541
3341	13.257	3447	$3^2.383$	3567	3.29.41	3681	$3^2.409$	3789	$3^2.421$
3345	3.5.223	3451	7.17.29	3569	43.83	3683	29.127	3791	17.223
3349	17.197	3453	3.1151	3573	$3^2.397$	3685	5.11.67	3795	3.5.11.23
3351	3.1117	3455	5.691	3575	$5^2.11.13$	3687	3.1229	3799	29.131
3353	7.479	3459	3.1153	3577	$7^2.73$	3689	7.17.31	3801	3.7.181
3355	5.11.61	3465	$3^2.5.7.11$	3579	3.1193	3693	3.1231	3805	5.761
3357	$3^2.373$	3471	3.13.89	3585	3.5.239	3695	5.739	3807	$3^4.47$
3363	3.19.59	3473	23.151	3587	17.211	3699	$3^3.137$	3809	13.293
3365	5.673	3475	$5^2.139$	3589	37.97	3703	7.23^2	3811	37.103
3367	7.13.37	3477	3.19.61	3591	$3^3.7.19$	3705	3.5.13.19	3813	3.31.41
3369	3.1123	3479	$7^2.71$	3595	5.719	3707	11.337	3815	5.7.109
3375	$3^3.5^3$	**3481**	59^2	3597	3.11.109	3711	3.1237	3817	11.347
3377	11.307	3483	$3^4.43$	3599	59.61	3713	47.79	3819	3.19.67
3379	31.109	3485	5.17.41	3601	13.277	3715	5.743	3825	$3^2.5^2.17$
3381	$3.7^2.23$	3487	11.317	3603	3.1201	3717	$3^2.7.59$	3827	43.89

*) См. справ. табл. №№ IV, VII, XIV, XVII, XXII и XXV.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1894. — № 6.

Sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur les deux côtés d'un angle quelconque. Par. *J. M.* Пусть прямая $AB = l$ скользитъ концами A и B по двумъ прямымъ, пересѣкающимся въ O и составляющимъ уголъ $= \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Относя эти прямыя къ прямоугольнымъ осямъ координатъ Ox и Oy, симметричнымъ относительно биссектриссы составленнаго ими угла, получимъ ихъ ур-нія:

$$y = x.\mathrm{tg}\alpha,\ y = x.\mathrm{cotg}\alpha. \qquad (1)$$

Ур-ніе прямой AB относительно тѣхъ-же осей будетъ:

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi = a\sin\varphi\cos\varphi + b, \qquad (2)$$

гдѣ $a = \frac{l}{\cos 2\alpha}, b = \frac{1}{2} l\mathrm{tg}2\alpha$, и φ уголъ, составляемый прямой AB съ отрицательнымъ направленіемъ оси Ox. Ур-ніе обвертки прямой AB получится черезъ исключеніе φ изъ ур-нія (2) и производнаго отъ него ур-нія

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi = a\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi;$$

ур-нія эти приводятся къ виду:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3\varphi + b\sin\varphi, \\ y &= a\sin^3\varphi + b\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (M).$$

Положивъ въ этихъ ур-яхъ $b = 0$, получимъ ур-нія

$$x = a\cos^3\varphi,\ y = a\sin^3\varphi \qquad (M')$$

гипоциклоиды съ четырьмя точками возврата, происходящей отъ катанія круга радіуса $\frac{1}{2}a$ по окружности радіуса a, или обвертки прямой $= a$, скользящей концами по осямъ Ox и Oy. Изъ сравненія кривыхъ (M) и (M′) обнаруживается, что эти кривыя во всѣхъ точкахъ отстоятъ одна отъ другой на разстояніе b; обѣ эти кривыя имѣютъ общую развертку и разность ихъ радіусовъ кривизны $= \pm b$. Слѣдов. кривая M имѣетъ четыре точки возврата, которыми она дѣлится на 4 части; каждыя двѣ не смежныя изъ этихъ частей равны и симметричны относительно начала координатъ; длина всей кривой M равна длинѣ кривой M′.

Rayon de courbure d'une conique. Par M. *A. Gob.* Обозначимъ черезъ ϱ радіусъ кривизны въ точкѣ M коническаго сѣченія, описаннаго около тр-ка ABC. Если x, y, z суть разстоянія точки M отъ сторонъ этого тр-ка, а α, β, γ — разстоянія его вершинъ отъ касательной въ M къ коническому сѣченію, то

$$\varrho = R\frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}, \qquad (1)$$

гдѣ R — радіусъ круга описаннаго около тр-ка ABC.

Доказ. Если ABC и A′B′C′ суть два тр-ка, вписанныхъ въ одну окружность, то, выражая площадь тр-ка черезъ произведеніе его сторонъ, дѣленное на двойной діаметръ, получимъ равенство

$$\frac{A'BC.B'CA.C'AB}{AB'C'.BC'A'.CA'B'} = \frac{ABC}{A'B'C'}, \qquad (2)$$

которое остается справедливымъ и для тр-въ, вписанныхъ въ коническое сѣченіе (въ этомъ можно убѣдиться при помощи метода ортогонал. проэкцій). Если R и R′